

## Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα: Από την αρχική ως την μοντέρνα διατύπωση

Ευθύμιος Γ. Χαροκόπος\*

### Εισαγωγή

Ο σκοπός του άρθρου αυτού είναι να απαντήσει σε σχόλια<sup>1</sup> του καθ. Γ. Ι. Γραμματικάκη στο βιβλίο *Εφτά Σταγόνες στον Ωκεανό της Γνώσης* (2003, 14) αναφορικά με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Με την ευκαιρία αυτή γίνεται και μία σύντομη πρόταση που αφορά την διδασκαλία του σημαντικού αυτού νόμου της Μηχανικής.

Η διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα που παραθέτει ο Γραμματικάκης (2003, 14) είναι η ακόλουθη:

Νόμος II: Η μεταβολή της κίνησης είναι ανάλογη με την επιβαλλόμενη δύναμη και γίνεται κατά την κατεύθυνση της ευθείας στην οποία επιβάλλεται η δύναμη.

Η παραπάνω διατύπωση δεν είναι ακριβής με βάση την αρχική διατύπωση του Νεύτωνα, γιατί έχει γίνει παράλειψη του όρου «κινήτρια»<sup>2</sup> πριν από την λέξη «δύναμη»:

Νόμος II: Η μεταβολή της κίνησης είναι ανάλογη με την επιβαλλόμενη κινήτρια δύναμη και γίνεται κατά την κατεύθυνση της ευθείας στην οποία επιβάλλεται η δύναμη. (Νεύτωνας 1952, 14)

Όπως θα δούμε παρακάτω, ο χαρακτηρισμός μιας επιβαλλόμενης δύναμης ως «κινήτρια» είναι σημαντικός και η παράλειψη του συγκεκριμένου όρου μπορεί να οδηγήσει σε λάθος συμπεράσματα.

Στη συνέχεια ο Γραμματικάκης (2003, 14) γράφει:

Άξιο σχολιασμού είναι το πώς ο Νεύτωνας διατυπώνει το δεύτερο νόμο, που είναι συνήθως γνωστός με την υπό μορφή συμβόλων διατύπωση του  $F = ma$ . Στην διατύπωση του δεύτερου νόμου ο Νεύτωνας χρησιμοποιεί την αδόκιμη ή και λανθασμένη έκφραση «μεταβολή της κίνησης» αντί του όρου «επιτάχυνση»...

Δεν συμφωνούμε με το παραπάνω σχόλιο και όπως θα αποδείξουμε παρακάτω η διατύπωση του δεύτερου νόμου από τον Νεύτωνα στηρίχτηκε σε συγκεκριμένους ορισμούς και από αυτήν προκύπτει η μοντέρνα διατύπωση  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ .

### Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα

Προτού διατυπώσει τους νόμους της κίνησης, ο Νεύτωνας παραθέτει οκτώ (8) ορισμούς. Τέσσερις ορισμοί χρησιμοποιούνται άμεσα στους νόμους της κίνησης, και οι υπόλοιποι τέσσερις χρησιμοποιούνται αργότερα στην εξαγωγή του νόμου της παγκόσμιας βαρύτητας. Ο πρώτος ορισμός αναφέρεται στην ποσότητα ύλης ενός σώματος, ο δεύτερος στον όρο «κίνηση» και ο τέταρτος στην έννοια της «επιβαλλόμενης δύναμης». Ο τρίτος ορισμός αναφέρεται στην αδράνεια ενός σώματος.

<sup>1</sup> Θεωρώ ότι τα σχόλια του καθ. Γραμματικάκη είναι στην ουσία ένα ερώτημα που αφορά την διατύπωση του Νεύτωνα. Για την απάντηση του ερωτήματος αυτού όμως απαιτείται εξειδικευμένη γνώση στο πεδίο της Φιλοσοφίας της Φυσικής, γνώση που δεν είναι απαραίτητη να έχει ένας Φυσικός. Εδώ δίνεται η απάντηση στο υποθετικό ερώτημα αυτό.

<sup>2</sup> “motive” (Η μετάφραση των νόμων και ορισμών του Νεύτωνα από την Αγγλική στη Ελληνική είναι δική μου)

Επαναλαμβάνω εδώ την ακριβή διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα

Νόμος II: Η μεταβολή της κίνησης είναι ανάλογη με την επιβαλλόμενη κινητήρια δύναμη και γίνεται κατά την κατεύθυνση της ευθείας στην οποία επιβάλλεται η δύναμη.

Ας δούμε πρώτα τι εννοεί ο Νεύτωνας με τον όρο «κίνηση»

Ορισμός II: Η ποσότητα κίνησης είναι η μέτρηση της ίδιας, προερχόμενη από την ταχύτητα και την ποσότητα της ύλης συνδεδεμένα.

Η κίνηση του όλου είναι το άθροισμα των κινήσεων όλων των μερών του; και έτσι σε ένα σώμα διπλό σε ποσότητα, με ίση ταχύτητα, η κίνηση είναι διπλή; με διπλή ταχύτητα, είναι τετραπλάσια. (Νεύτωνας 1952, 4-5)

Από τον παραπάνω ορισμό είναι προφανές ότι ως «κίνηση» ο Νεύτωνας ορίζει το γινόμενο της ποσότητας ύλης (μάζα) επί την ταχύτητα, δηλαδή το άνυσμα που αργότερα ονομάστηκε «ορμή». Την επιβαλλόμενη δύναμη ορίζει ως εξής

Ορισμός IV: Η επιβαλλόμενη δύναμη είναι μια δράση ασκούμενη πάνω σε ένα σώμα, με σκοπό να αλλάξει την κατάσταση του, ή από στάση, ή από ομαλή ευθύγραμμη κίνηση.

Η δύναμη αυτή συντελεί στην δράση μόνο, και δεν παραμένει στο σώμα όταν η δράση περατωθεί. Ένα σώμα διατηρεί κάθε νέα κατάσταση που αποκτά, με την αδράνεια μόνο. Αλλά επιβαλλόμενες δυνάμεις είναι διαφορετικής προέλευσης, όπως από κρούση, από πίεση, από κεντρομόλο δύναμη. (Νεύτωνας 1952, 4-5)

Εδώ ο Νεύτωνας ορίζει την «επιβαλλόμενη δύναμη» αλλά στην διατύπωση του δεύτερου νόμου χρησιμοποιεί την φράση «επιβαλλόμενη κινητήρια δύναμη». Είναι σημαντικό να επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε αυτή τη διαφορά που προκύπτει, δηλαδή στην διαφορά μεταξύ μιας επιβαλλόμενης δύναμης και μιας επιβαλλόμενης κινητήριας δύναμης.

Κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ μιας επιβαλλόμενης δύναμης και μιας επιβαλλόμενης κινητήριας δύναμης και πιθανώς να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι ο Νεύτωνας όρισε την «κίνηση» λάθος. Συγκεκριμένα, ότι ως «μεταβολή της κίνησης» εννοούσε την επιτάχυνση και όχι την ορμή, όπως ισχυρίστηκε ο Γραμματικάκης (2003, 14). Όμως, μια επιβαλλόμενη δύναμη είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή να αλλάξει την κινητική κατάσταση ενός σώματος. Για παράδειγμα, μια δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε στάση πάνω σε μια επιφάνεια με μεγάλο συντελεστή στατικής τριβής δεν δύναται να επιφέρει αλλαγή στην κινητική του κατάσταση αν το μέγεθος της δεν είναι ικανό για αυτό. Ίσως για αυτό τον λόγο ο Νεύτωνας στον Ορισμό IV αναφέρεται στην σκοπιμότητα της επιβαλλόμενης δύναμης (“...ασκούμενη πάνω σε ένα σώμα, με σκοπό να αλλάξει την κατάσταση του”). Είναι η κινητήρια επιβαλλόμενη δύναμη που σχετίζεται με την αλλαγή της κίνησης (ορμής) ενός σώματος στο οποίο ασκείται μια δύναμη και τα δύο αυτά μεγέθη δυνάμεων σχετίζονται όπως θα δούμε παρακάτω.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην εξαγωγή της υπό μορφής συμβόλων διατύπωση του δεύτερου νόμου. Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι παρόμοια με αυτή του Barbour 2001. Μια διαφορά είναι ότι με την συλλογιστική που ακολουθείται εδώ εξάγεται μια γενική σχέση που καλύπτει όλα τα διαφορετικά είδη επιβαλλόμενων δυνάμεων που σύμφωνα με τον Ορισμό IV του Νεύτωνα δύνανται να αλλάζουν την κινητική κατάσταση ενός σώματος.

Ως «κίνηση», λοιπόν, ορίζουμε το άνυσμα  $\mathbf{p}$  που σύμφωνα με τον Ορισμό II του Νεύτωνα ισούται με το γινόμενο του μονόμετρου μεγέθους  $m$  επί την ταχύτητα  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1)$$

Η μεταβολή της «κίνησης»  $\Delta p$  ορίζεται ως εξής

$$\Delta p = (p)_{\text{τελική}} - (p)_{\text{αρχική}} \quad (2)$$

Η «επιβαλλόμενη κινητήρια δύναμη» προκύπτει από, ή συντελεί σε<sup>3</sup>, μια επιβαλλόμενη δύναμη, η οποία, σύμφωνα με τον Ορισμό IV, δεν παραμένει στο σώμα όταν η δράση περατωθεί. Δηλαδή, η «επιβαλλόμενη κινητήρια δύναμη» δρα για ένα χρονικό διάστημα  $\Delta t$  στην διάρκεια του οποίου επιφέρεται η αλλαγή της κινητικής κατάστασης, εξ' ου και ο χαρακτηρισμός κινητήρια. Όπως προκύπτει λοιπόν, η «επιβαλλόμενη κινητήρια δύναμη» είναι αυτή που καλείται στη Μηχανική «ώθηση δύναμης» **I**

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t \quad (3)$$

όπου **F** είναι η επιβαλλόμενη δύναμη στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$ .

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η μεταβολή της «κίνησης» είναι ανάλογη με την «επιβαλλόμενη κινητήρια δύναμη» και έτσι από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε

$$\mathbf{F}\Delta t = \kappa\Delta p \quad (4)$$

όπου  $\kappa$  είναι μια θετική σταθερά. Η *στιγμιαία* μεταβολή της κίνησης συνεπάγεται από την εξίσωση (4) όταν  $\Delta t$  τείνει στο μηδέν

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\kappa\Delta p}{\Delta t} = \kappa \frac{dp}{dt} \quad (5)$$

Με κατάλληλη επιλογή ενός συστήματος μονάδων (Greenwood 1965, 13) όπου η σταθερά  $\kappa$  είναι ίση με την μονάδα, από την εξίσωση (5) προκύπτει η μοντέρνα διατύπωση του δεύτερου νόμου

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6)$$

όπου το άνυσμα **p** είναι η «ορμή» και υπολογίζεται από την εξίσωση (1).

### Σχόλιο

Η εξίσωση (6), η σχέση μεταξύ δύναμης και ρυθμού μεταβολής της ορμής στον χρόνο, μπορεί να εφαρμοστεί και σε καταστάσεις σωμάτων, ή συστημάτων σωμάτων, όπου η μάζα δεν παραμένει σταθερή αλλά μεταβάλλεται. Σε κανένα σημείο της εξαγωγής της μοντέρνας διατύπωσης του δεύτερου νόμου από την αρχική του διατύπωση από τον Νεύτωνα δεν έγινε η υπόθεση ότι η μάζα παραμένει σταθερή. Στη περίπτωση που η μάζα μεταβάλλεται ως συνάρτηση του χρόνου, από τις εξισώσεις (1) και (6) προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{F} = m(\frac{d\mathbf{v}}{dt}) + \mathbf{v}(\frac{dm}{dt}) \quad (7)$$

<sup>3</sup> Αρκετοί έχουν υποστηρίξει ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι μια ταυτολογία, δηλαδή η επιβαλλόμενη δύναμη είναι απλώς ένα άλλο όνομα για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής στο χρόνο. Ένα παράδειγμα που φανερώνει την πιθανή αυτή ταυτολογική σχέση είναι η περίπτωση ομαλής κυκλικής κίνησης. Το ερώτημα είναι αν είναι η κεντρομόλος δύναμη που συντελεί στην κυκλική κίνηση ή η κυκλική κίνηση συντελεί στην εμφάνιση της κεντρομόλου δύναμης. Θεωρητικά, οι δύο αυτές εναλλακτικές απόψεις, αναφορικά με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, είναι ισοδύναμες, όπως υποστηρίζει ο Greenwood (1960, 12).

Η εξίσωση (7) είναι γνωστή και ως «εξίσωση της ρουκέτας» επειδή η μάζα μιας ρουκέτας σε πτήση αλλάζει λόγω της κατανάλωσης καυσίμου. Αν η μάζα ενός σώματος παραμένει σταθερή, τότε  $dm/dt = 0$  και έτσι προκύπτει ότι  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ , όπου το άνωσμα  $\mathbf{g}$ , η αλλιώς η επιτάχυνση, ορίζεται ίσο με τον ρυθμό της μεταβολή της ταχύτητας  $\mathbf{v}$  στον χρόνο,  $d\mathbf{v}/dt$ . Αυτή η διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θεωρείται ότι έγινε πρώτα από τον Euler. Ότι από την ειδική αυτή μορφή του δευτέρου νόμου και με μια απλή μαθηματική πράξη της μορφής  $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt = d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt$  δύναται να προκύψει η σχέση (6), όπως το θέτει ο Αλεξόπουλος (1960, 60), δεν είναι απόλυτα σωστό.

### Από τον Νεύτωνα μέχρι σήμερα

Η σχέση ορμής και δύναμης που προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα αποτελεί τη βάση της Κλασσικής Μηχανικής. Η εξίσωση (6) ισχύει σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς αλλά όμως μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς με κατάλληλες τροποποιήσεις.

Οι τροποποιήσεις που απαιτούνται ώστε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα να μπορεί να εφαρμοστεί σε μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς (βλέπε για παράδειγμα Αλεξόπουλο 1960, κεφάλαιο έβδομο), όπως η θεώρηση υποθετικών (γνωστών και ως αδρανειακών) δυνάμεων (π.χ. φυγόκεντρος και Coriolis), προκαλούν επιστημολογικά (μεταφυσικά) ερωτήματα για το αν οι νόμοι της φύσης πρέπει να είναι οι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές σε όλα τα κινούμενα συστήματα αναφοράς, αδρανειακά ή μη.

Ο πρώτος που αμφισβήτησε τους νόμους της κίνησης του Νεύτωνα ως νόμους της φύσης ήταν ο μαθηματικός, φιλόσοφος και δικηγόρος Gottfried Wilhelm Leibniz αλλά ο ίδιος απέτυχε να θεμελιώσει την εναλλακτική του πρόταση μιας σχεσιακής δυναμικής στην έννοια της «ζωντανής δύναμης» (*vis viva*), την οποία όρισε ίση με  $mv^2$ . Ο βασικός λόγος της αποτυχίας αυτής ήταν ότι η ποσότητα  $mv^2$  εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο γίνεται η μέτρηση της, ενώ η Νευτώνεια δύναμη παραμένει τουλάχιστον αναλλοίωτη σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, αφού η επιτάχυνση ενός σώματος παραμένει αναλλοίωτη για μετασχηματισμούς στην ομάδα αυτή (Galilean group).<sup>4</sup>

Μετά από δύο περίπου αιώνες, ο Αϊνστάιν χρησιμοποίησε την (μεταφυσική) επιστημολογική αρχή ότι όλα τα φαινόμενα πρέπει να έχουν την ίδια εξήγηση σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, σε ένα από τα αξιώματα της θεωρίας της Ειδικής Σχετικότητας (Reichenbach 1958, 217), όπου το Galilean group αντικαθίσταται από το Lorentz group. Στη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας γίνεται μια προσπάθεια ώστε η αρχή αυτή να γενικευτεί για όλα τα κινούμενα συστήματα αναφοράς με απώτερο στόχο μια δυναμική στην οποία η έννοια της δύναμης δεν υφίσταται στην περίπτωση των βαρυτικών φαινομένων και που είναι ένα αποτέλεσμα του καμπύλου χωροχρόνου. Πολλοί διαφωνούν αν αυτό έχει επιτευχθεί τελικά γιατί προκύπτουν καινούργια ερωτήματα που είναι έξω από τον σκοπό του άρθρου αυτού. Αν και η θεωρία της Σχετικότητας υπό την μορφή μαθηματικού μοντέλου με μεγάλη ακρίβεια πρόβλεψης (και όχι αναγκαία ως μια θεωρία που εξηγεί την φύση) έχει καθιερωθεί πλέον στην μοντέρνα φυσική, οι νόμοι του Νεύτωνα, όπως αρχικά διατυπώθηκαν αλλά με μοντέρνους όρους, (συμπεριλαμβανομένου και του νόμου της παγκόσμιας βαρύτητας), παραμένουν χρήσιμοι για λύση προβλημάτων στα οποία δεν υπόκεινται σε σχετικιστικές συνθήκες και πού είναι η πλειονότητα των πρακτικών προβλημάτων με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι ειδικά οι μηχανικοί.

Πρόσφατα, ο καθηγητής του MIT E. F. Taylor (2003) πρότεινε να αντικατασταθούν οι νόμοι του Νεύτωνα από την αρχή της ελάχιστης δράσης (Least Action Principle) από την οποία φαίνεται να προκύπτουν μετά από μαθηματικές πράξεις. Η αρχή αυτή είναι και (γενικότερα) γνωστή ως Αρχή της Δράσης. Αρκετοί αμφισβητούν αν η αρχή αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως νόμος της φύσης ή της

<sup>4</sup> Αυτό αποδεικνύεται εύκολα από την Galilean ομάδα μετασχηματισμών  $\{ t' = t, x' = x - ut \}$  για κίνηση στον άξονα  $x$ . Από τις σχέσεις έχουμε ότι  $v' = v - u$  (άρα η ταχύτητα εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς) και έπεται ότι  $a' = a$ , δεδομένου ότι η ταχύτητα  $u$  είναι σταθερή εξ' ορισμού (άρα η επιτάχυνση παραμένει αναλλοίωτη στη ομάδα των μετασχηματισμών αυτών και σαν αποτέλεσμα και η δύναμη  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ).

κίνησης αν και η επιτυχημένη εφαρμογή της στην λύση προβλημάτων είναι δεδομένη. Η πρόταση του E. F. Taylor ακούγεται περισσότερο ως μια αμφισβήτηση της έννοιας «νόμος της κίνησης» από την σκοπιά των πρωτοπόρων της μηχανικής του 17ου και 18ου αιώνα. Ένα ερώτημα είναι αν η αμφισβήτηση αυτή είναι πρόοδος, ή πρόοδος σημαίνει η λύση των προβλημάτων θεμελίωσης που έμειναν αναπάντητα από τους πρωτοπόρους της Κλασική Μηχανικής ως σήμερα.

### Μια πρόταση εκπαιδευτικού χαρακτήρα

Προτείνουμε να διδάσκεται η δεύτερος νόμος του Νεύτωνα με βάση την αρχική του διατύπωση αλλά με μοντέρνους όρους. Για παράδειγμα, προτείνουμε την ακόλουθη διατύπωση

Νόμος II: Ο μεταβολή της ορμής ενός σώματος είναι ίση με την ώθηση δύναμης που ασκείται σε αυτό.

Υπό μορφή συμβόλων

$$\Delta(mv) = F\Delta t \quad (8)$$

Στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, είναι καλό να γίνεται αναφορά στο πως η σχέση  $F = m\gamma$ , που ισχύει όταν η μάζα  $m$  παραμένει σταθερή, προκύπτει από τον δεύτερο νόμο ως εξής

$$\Delta(mv) = F\Delta t \Leftrightarrow F = \Delta(mv)/\Delta t \Rightarrow F = m\Delta v/\Delta t \Rightarrow F = m\gamma_{\mu}$$

όπου  $\gamma_{\mu}$  είναι η μέση επιτάχυνση.

Η διατύπωση του δεύτερου νόμου με την εξίσωση (8) είναι συμβατή με την μοντέρνα και σωστή διατύπωση  $F = dp/dt$  που διδάσκεται σε Πανεπιστημιακό επίπεδο όπου και θα ήταν σκόπιμο να εξάγεται από την αρχική διατύπωση του Νεύτωνα με τρόπο παρόμοιο αυτού που ακολουθήθηκε εδώ.

### Βιβλιογραφία

Αλεξόπουλος, Κ. Δ. (1960), *Γενική Φυσική: Μηχανική-Ακουστική*, τόμος πρώτος, Αθήνα

Barbour, J. B. (2001), *The Discovery of Dynamics: A Study from a Machian Point of View of the Discovery and the Structure of Dynamical Theories*. New York: Oxford Univ. Press

Γραμματικάκης, Ι. Γ. (2003), “Από τον Αριστοτέλη στον Νεύτωνα”, στην εκδ. Φιλντίση Π., *Εφτά Σταγόνες στον Ωκεανό της Γνώσης*. Αθήνα: Ένωση Ελλήνων Φυσικών, 9-15.

Greenwood, D. T. (1965), *Principles of Dynamics*, New Jersey: Prentice-Hall

Newton, Isaac (1952), *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Translated by Andrew Motte and revised by Florian Cajori, in Robert Maynard Hutchins (ed.), *Great Books of the Western World: 34. Newton, Huygens*. Chicago: Encyclopedia Britannica, 1-372

Reichenbach, Hans (1958), *The Philosophy of Space and Time*, New York: Dover

Taylor, E. F. (2003), “A Call to Action” *American Journal of Physics* **71**(5): 423-425

\*email: [makischarokopos@yahoo.com](mailto:makischarokopos@yahoo.com)